第 7 講　領域

PART1　領域を利用した証明

1　$|x|+|y|\leqq 1$ ならば $(x+2y-2)(x^2+y^2-4)\geqq 0$ が成り立つことを証明せよ。

Point Pickup

不等式 $AB>0$ が表す領域は 連立不等式 $\begin{cases} A>0 \\ B>0 \end{cases}$ または $\begin{cases} A<0 \\ B<0 \end{cases}$ の表す領域である。

不等式 $AB<0$ が表す領域は 連立不等式 $\begin{cases} A>0 \\ B<0 \end{cases}$ または $\begin{cases} A<0 \\ B>0 \end{cases}$ の表す領域である。

条件 p が表す領域を P，条件 q が表す領域を Q とすると

「命題 $p \Longrightarrow q$ が真」 $\Longleftrightarrow$ 「$P\subset Q$」

である。これを利用して，領域 P，Q を図示し，包含関係を用いて命題が真であることを示す方法がある。

第７講　PART1　確認問題

1　x，y は実数とする。次のことを証明せよ。

$(x+2y-4)(x^2+y^2-2x-8)<0$ ならば $|x|+|y|>2$

（証明）

不等式 $(x+2y-4)(x^2+y^2-2x-8)<0$，$|x|+|y|>2$ の表す領域を，それぞれ P，Q とする。

領域 P は [ア]，　領域 Q は [イ]

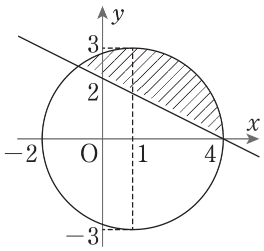
それぞれの斜線部分である。ただし，いずれも境界線を含まない。

したがって，[ウ] が成り立つ。

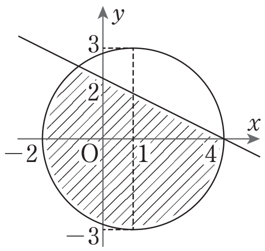
よって，$(x+2y-4)(x^2+y^2-2x-8)<0$ ならば $|x|+|y|>2$ である。

[ア の選択肢]

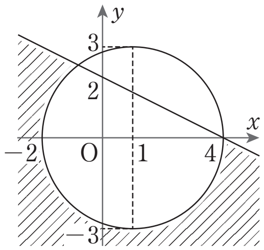
①



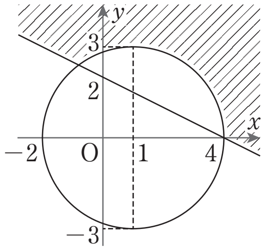
②



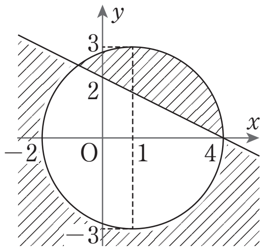
③



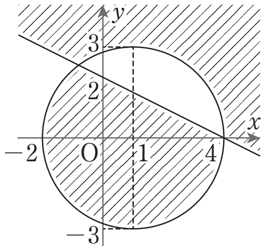
④



⑤

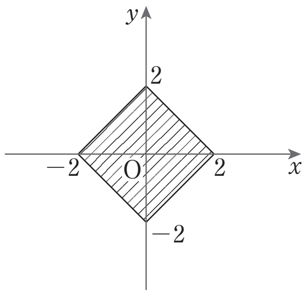


⑥

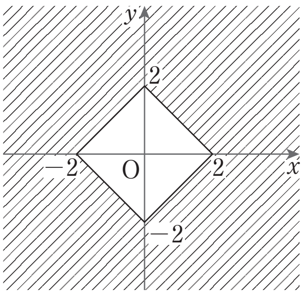


[イ の選択肢]

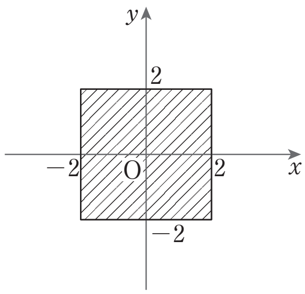
①



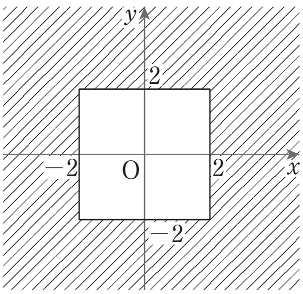
②



③



④



[ウ の選択肢]

①　$P \subset Q$　　　　②　$Q \subset P$

第 7 講　領域
PART1　領域を利用した証明

1　$|x|+|y|\leqq 1$ ならば $(x+2y-2)(x^2+y^2-4)\geqq 0$ が成り立つことを証明せよ。

不等式 $|x|+|y|\leqq 1$，$(x+2y-2)(x^2+y^2-4)\geqq 0$ の表す領域をそれぞれ P，Q とする。

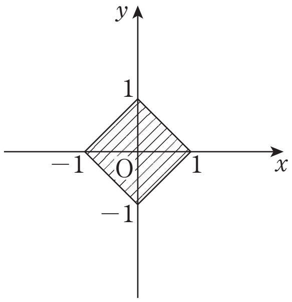
領域 P について

$x\geqq 0$，$y\geqq 0$ のとき　$x+y\leqq 1$　つまり　$y\leqq -x+1$

$x\geqq 0$，$y<0$ のとき　$x-y\leqq 1$　つまり　$y\geqq x-1$

$x<0$，$y\geqq 0$ のとき　$-x+y\leqq 1$　つまり　$y\leqq x+1$

$x<0$，$y<0$ のとき　$-x-y\leqq 1$　つまり　$y\geqq -x-1$



よって，領域 P は右図斜線部分。ただし，境界線を含む。

領域 Q について

$x+2y-2\geqq 0$　かつ　$x^2+y^2-4\geqq 0$　……①

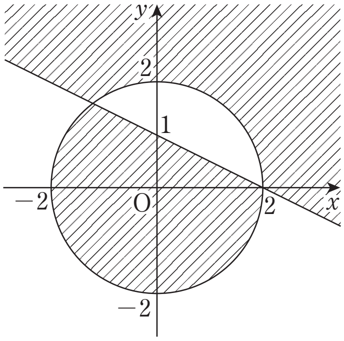
または

$x+2y-2\leqq 0$　かつ　$x^2+y^2-4\leqq 0$　……②

の表す領域である。

①より　$y\geqq -\dfrac{1}{2}x+1$　かつ　$x^2+y^2\geqq 4$

②より　$y\leqq -\dfrac{1}{2}x+1$　かつ　$x^2+y^2\leqq 4$



よって，領域 Q は右図斜線部分。ただし，境界線を含む。

したがって，$P\subset Q$ が成り立つので，

$|x|+|y|\leqq 1$　ならば　$(x+2y-2)(x^2+y^2-4)\geqq 0$

が成り立つ。

第７講　PART1　確認問題 解答

1 **[正解]** ア：⑤，イ：②，ウ：①

[解説]

不等式 $(x+2y-4)(x^2+y^2-2x-8)<0$，

$|x|+|y|>2$ の表す領域を，それぞれ P，Q とする。

領域 P について

$(x+2y-4)(x^2+y^2-2x-8)<0$ より [A]

「$x+2y-4>0$ かつ $x^2+y^2-2x-8<0$」……(＊)

または

「$x+2y-4<0$ かつ $x^2+y^2-2x-8>0$」

……(＊＊)

[A]　$AB>0$

$\iff \begin{cases} A>0 \\ B>0 \end{cases}$ または $\begin{cases} A<0 \\ B<0 \end{cases}$

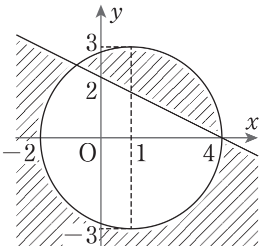
$AB<0$

$\iff \begin{cases} A>0 \\ B<0 \end{cases}$ または $\begin{cases} A<0 \\ B>0 \end{cases}$

(＊)より　「$y>-\dfrac{1}{2}x+2$ かつ $(x-1)^2+y^2<9$」

(＊＊)より　「$y<-\dfrac{1}{2}x+2$ かつ $(x-1)^2+y^2>9$」

よって，領域 P は右図斜線部分。ただし，境界線を含まない。



領域 Q について

$|x|+|y|>2$ より

$x\geqq 0$，$y\geqq 0$ のとき　$x+y>2$

すなわち　$y>-x+2$

$x\geqq 0$，$y<0$ のとき　$x-y>2$

すなわち　$y<x-2$

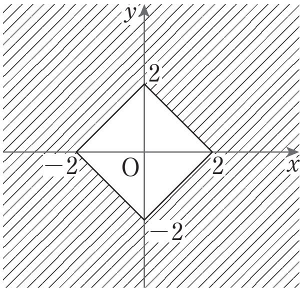
$x<0$，$y\geqq 0$ のとき　$-x+y>2$

すなわち　$y>x+2$

$x<0$，$y<0$ のとき　$-x-y>2$

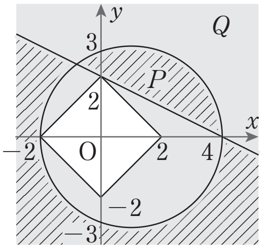
すなわち　$y<-x-2$

よって，領域 Q は右図斜線部分。ただし，境界線を含まない。

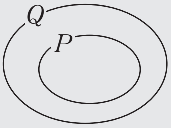


したがって，$\boldsymbol{P\subset Q}$ が成り立つ。［B］

よって，$(x+2y-4)(x^2+y^2-2x-8)<0$ ならば $|x|+|y|>2$ である。



［B］　条件 p が表す領域を P，条件 q が表す領域を Q とすると，

命題 $p\Longrightarrow q$ が真

$\Longleftrightarrow P\subset Q$